

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ¹⁾**Р.Л. ДАВЫДОВ, Л.У. СУЛТАНОВ***Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail Lenar.Sultanov@kpfu.ru; ruslan.davydov@mail.ru***ALGORITHM OF ANALYSIS OF ELASTOPLASTIC SOLIDS WITH LARGE DEFORMATIONS****R.L. DAVYDOV, L.U. SULTANOV***Kazan Federal University***Аннотация**

Представлена методика исследования НДС упругопластических тел с учетом больших перемещений. Применяется метод пошагового нагружения с формулировкой разрешающего вариационного уравнения в текущей конфигурации. Используется определяющие соотношения для упругопластических тел, связывающие производную Трусделла тензора напряжений Коши-Эйлера с деформацией скорости. Пространственная дискретизация основана на МКЭ. Приводятся численные решения задач.

Ключевые слова: Большие деформации, нелинейная упругость, пластичность.

Summary

A technique for analyzing the stress strain state of elastoplastic bodies taking into account large displacements and buckling is presented. The step-by-step loading method with formulation of the resolvent variation equation in the current configuration is used. The governing equations for elastoplastic bodies that connect the Truesdell derivative of the Cauchy stress tensor with the velocity strain are applied. The spatial discretization is based on the finite element method (FEM). The numerical solutions of the problems are given.

Key words: large deformations, nonlinear elasticity, plasticity.

1. Кинематика среды. Уравнение в скоростях напряжений

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются тензор градиента деформации (F), мера деформации Фингера (B) = $(F) \cdot (F)^T$, тензор пространственного градиента скорости (h) = $\frac{\partial v_i}{\partial y_j} (\vec{e}_i \vec{e}_j) = (\dot{F}) \cdot (F)^{-1}$, тензор деформации скорости (d) = $\frac{1}{2} [(h) + (h)^T]$, где v_i — компоненты вектора скорости \vec{v} , y_j — компоненты радиус-вектора, $(\vec{e}_i \vec{e}_j)$ — диадное произведение орт декартовой системы координат. Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений (Σ) = $\sigma_{ij} (\vec{e}_i \vec{e}_j)$, определенного в актуальном состоянии.

Для решения задач с учетом физической нелинейности (в первую очередь задач пластического деформирования) получили распространение формулировки разрешающих вариационных уравнений в скоростях деформаций и напряжений. Такие уравнения могут быть получены дифференцированием по времени уравнения принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации [1, 2]

$$\int_{\Omega} (\Sigma) \cdot (\delta d) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \int_{S^{\sigma}} \vec{p} \cdot \delta \vec{v} dS. \quad (1)$$

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-97058, 13-01-97059, 12-01-00955, 12-01-97026)

где Ω – текущий объем, S^σ – часть поверхности, на которой заданы усилия, \vec{f}, \vec{p} – векторы объемных и поверхностных сил соответственно. После линеаризации (1) получим уравнение в скоростях напряжений

$$\int_{\Omega} \left[(\dot{\Sigma}) \cdot \cdot (\delta d) + (\Sigma) \cdot \cdot (\delta \dot{d}) + \frac{\dot{J}}{J} (\Sigma) \cdot \cdot (\delta d) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[\dot{\vec{f}} + \vec{f} \frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \int_{S^\sigma} \left[\dot{\vec{p}} + \vec{p} \frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta \vec{v} dS, \quad (2)$$

где $J = \det(F)$ – относительное изменение объема.

2. Определяющие соотношения

Определяющие соотношения получим используя потенциальную энергию упругой деформации, которую определяет функция W . Для скорости напряжений Коши-Эйлера получим выражение [3–6]:

$$(\dot{\Sigma}) = \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial B} \right) \cdot \cdot (\dot{B}) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d},$$

где введено обозначение

$$(\Lambda_\Sigma) = \frac{4}{J} (B) \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial B \partial B} \right) \cdot (B).$$

В результате получаем физическое соотношение упругого деформирования для производной Трусделла [7] в виде линейного уравнения:

$$(\Sigma^{Tr}) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d), \quad (3)$$

где $(\Sigma^{Tr}) = (\dot{\Sigma}) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - I_{1d}(\Sigma)$ – производная Трусделла тензора напряжений (Σ) .

Моделирование упругопластических деформаций основано на аддитивном представлении полной деформации скорости [8, 9], т.е.

$$(d) = (d^e) + (d^p),$$

где (d^e) – упругая составляющая, а (d^p) – пластическая.

Предполагается справедливость ассоциированного закона течения $(d^p) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \right)$, где $\dot{\lambda}$ – скорость пластических деформаций, Φ – функция текучести.

Рассмотрим в качестве критерия упругого деформирования условие Губера-Мизеса, которое для изотропной среды допускает обобщение в виде

$$\Phi = \sigma_i - \sigma_T(\chi) \leq 0, \quad (4)$$

где σ_i – интенсивность напряжений, $\sigma_T(\chi)$ – предел текучести, χ – параметр упрочнения.

Тогда используя (4) пластическую деформацию скорости можно записать следующим образом:

$$(d^p) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \right) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \Sigma'} \right) = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{(\Sigma')}{\sigma_i}.$$

3. Общий алгоритм решения

Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний. Переход от предыдущего состояния к последующему происходит путем приращения нагрузок.

В качестве базового на шаге нагружения используется уравнение в скоростях напряжений (2) в совокупности с линеаризованными физическими соотношениями (3), решая которую получим вектор перемещений, определяющий конфигурацию на следующем шаге нагружения:

$$^{k+1}y^i = ^k y^i + \Delta^k u^i \quad (5)$$

и напряженное состояние

$$^{k+1}\sigma_{ij} = ^k \sigma_{ij} + ^k \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \quad (6)$$

Далее для учета пластических деформаций применяем метод проецирования [9]. В результате использования метода "проецирования напряжения на поверхность текучести" полученное напряженное состояние не удовлетворяет разрешающей системе уравнений. Поэтому воспользуемся итерационным уточнением НДС. Эта итерационная процедура основана на введении в разрешающее уравнение вариации мощности "дополнительных напряжений" (Σ_∂) на возможных деформациях скорости, где дополнительные напряжения определяются как разность истинных и пробных напряжений, определяемых по формуле

$$({}^k\Sigma_\partial^{m+1}) = (\Sigma^m) - (\Sigma'^m)$$

Для дискретизации системы уравнений (2) используется метод конечных элементов на основе восьмиузлового элемента [10, 11]. В итоге для m -й итерации на k -м шаге нагружения имеем:

$${}^kK\Delta{}^k u^m = \Delta{}^k P + {}^kH - {}^kS^m$$

где ${}^kS^m$ — вектор дополнительных напряжений.

4. Численные примеры

В физических соотношениях в качестве примера используется следующий потенциал упругих деформаций [18, 19]:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{8}(I_{1B} - 3)^2 + \mu(I_{1B} - 3) - \frac{\mu}{2}(I_{2B} - 3)$$

где λ , μ — параметры Ляме. В качестве базового в настоящей работе используется произвольный восьмиузловой конечный элемент. При вычислении интегралов используется схема численного интегрирования.

4.1. Упругопластическое растяжение круглого стержня

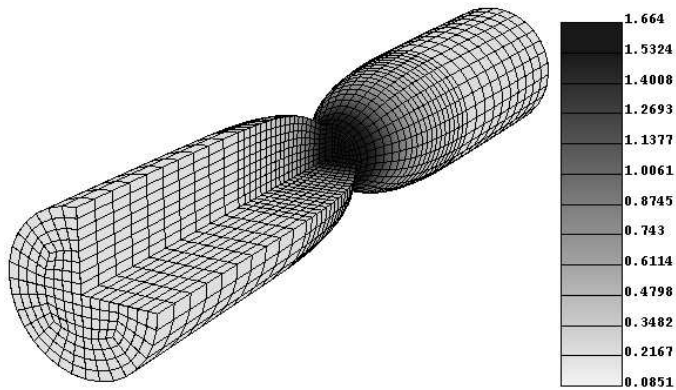


Рис. 1: Интенсивность пластических деформаций

Рассмотрим задачу растяжения круглого стержня со следующими параметрами: $R = 6.413$ мм, $R_0 = 0.982R$ мм, $L = 26.667$ мм. Отметим, что для конкретизации места образования шейки в центре стержня задается снижение радиуса на 1.8%. Критерием пластичности служит условие Губера-Мизеса (4). Функция нелинейного изотропного упрочнения имеет вид [12, 13]:

$$\sigma_T(\chi) = \sigma_T + h\chi + (\sigma_\infty - \sigma_T)(1 - e^{-\delta\chi}).$$

Параметры материала: $E = 206.9$ ГПа, $\nu = 0.29$, $\sigma_\infty = 715$ ГПа, $\sigma_T = 450$ ГПа, $h = 0.129$, $\delta = 16.93$. В качестве нагрузки на торце задается перемещение $u = 7$ мм. На рис. 1 приводится интенсивность пластических деформаций для конечного положения, на рис. 2 — диаграмма сила-перемещение.

4.2. Упругопластическое деформирование трубы

Исследуем закритическое поведение трубы под действием крутящих моментов M , приложенных на торцах. Диаметр трубы $d = 70$ мм, длина $L = 200$ мм, толщина $h = 3$ мм. Критерием пластичности служит условие Губера-Мизеса (4). Функция нелинейного изотропного упрочнения имеет вид [12, 13]:

$$\sigma_T(\chi) = \sigma_T + h\chi + (\sigma_\infty - \sigma_T)(1 - e^{-\delta\chi}).$$

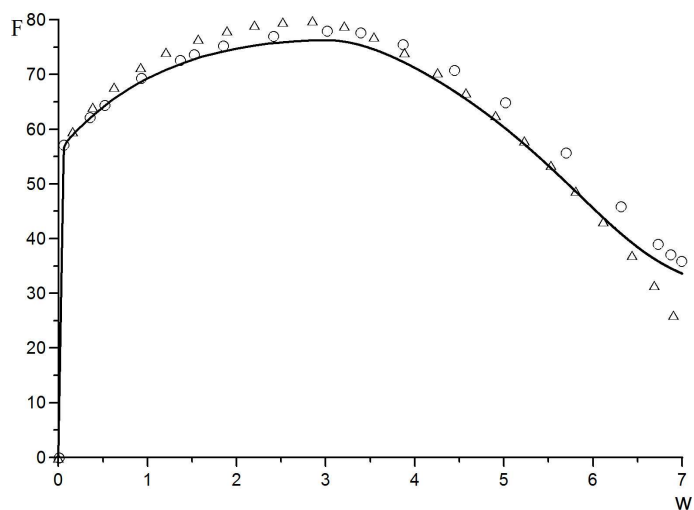


Рис. 2: Диаграмма сила — перемещение торца: сплошная кривая — решение по описанной методике, ○ — решение [12], △ — решение [13]

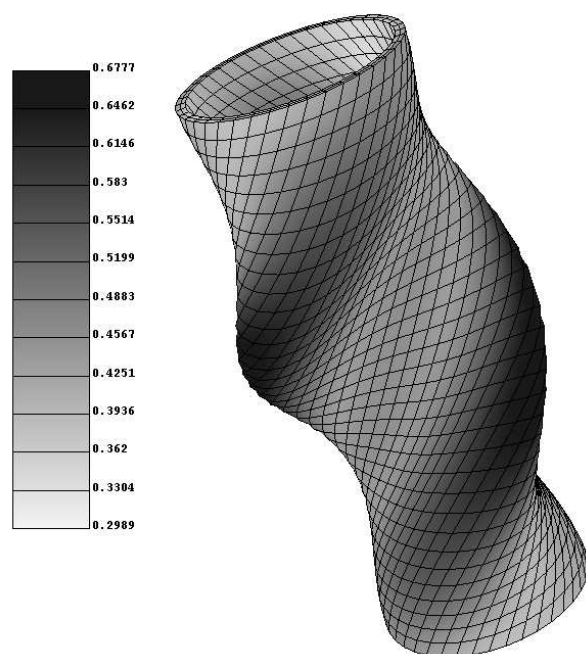


Рис. 3: Интенсивность пластических деформаций

Параметры материала: $E = 206.9$ ГПа, $\nu = 0.29$, $\sigma_{\infty} = 715$ ГПа, $\sigma_T = 450$ ГПа, $h = 0.129$, $\delta = 16.93$. На рисунке 3 представлена интенсивность пластических деформаций для деформированного состояния.

Заключение

В работе построена методика численного исследования изотропных материалов с использованием левого тензора Коши-Грина, для которых физические соотношения задаются с помощью упругого потенциала. В качестве примера рассмотрен материал 2-го порядка. Получены линеаризованные определяющие соотношения и разрешающее уравнение. Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента. Решены задача о упругопластическом растяжении

круглого стержня и задача о кручении толстостенной трубы. Решенные задачи демонстрируют работоспособность полученной методики исследования нелинейно упругих задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2008. — Т. 150, Кн 1. — С. 29–37.
2. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2008. — Т. 150, Кн 3. — С. 122–132.
3. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2009. — Т. 151, Кн 3. — С. 108–120.
4. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел IV. Конечноеэлементная реализация. Примеры решения задач // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. — 2010. — Т. 152, Кн 4. — С. 115–126.
5. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. — Киев, 2005. — Т. 41, № 6. — С. 36–43.
6. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. — 1997. — 283 p.
7. Трудселл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.
8. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965. — 455 с.
9. Голованов А. И., Султанов Л. У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Известия Вузов. Авиационная техника. — 2008. — № 4. — С. 13–16
10. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. — М.: Мир, 1976. — 464 с.
11. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. — Л.: Машиностроение, 1986. — 336 с.
12. Schröder J., Gruttmann F. Löblein J. A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures // Computational Mechanics. — 2002. — P. 48–64.
13. Eidel B., Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // Computational Materials Science. — 2003. — V. 28. — P. 732–742.
14. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. — Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. — 465 с.
15. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. — Новосибирск, 2000. — 262 с.
16. Голованов А.И., Султанов Л.У. Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. — Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2008. — 165 с.
17. Давыдов Р.Л., Султанов Л.У. Численный алгоритм решения задачи о больших упругопластических деформациях МКЭ // Вестник ПНИПУ. Механика. — Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2013. — № 1. — С. 81–93.
18. Султанов Л.У., Давыдов Р.Л. Численное исследование больших деформаций методом конечных элементов // Инженерно-строительный журнал. — Санкт-Петербург: СПбГУ, 2013. — № 9(44). — С. 64–68.
19. Golovanov A.I., Sultanov L.U. Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies // International Applied Mechanics. — 2005. — V. 41, № 6. — P. 614–620.

REFERENCES

1. **Golovanov A.I., Konoplev Y.G., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids. I. Kinematics and variational equations [Chislennoye issledovaniye konechnykh deformatsiy giperuprugikh tel. I. Kinematika i variatsionnyye uravneniya] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2008. – V. 150, Book 1. – P. 29–37. (in Russian)
2. **Golovanov A.I., Konoplev Y.G., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids. II. Stress-strain relationships [Chislennoye issledovaniye konechnykh deformatsiy giperuprugikh tel. II. Fizicheskiye sootnosheniya] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2008. – V. 150, Book 3. – P. 122–132. (in Russian)
3. **Golovanov A.I., Konoplev Y.G., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids. III. Statements of Problem and Solution Algorithms [Chislennoye issledovaniye konechnykh deformatsiy giperuprugikh tel III. Postanovki zadachi i algoritmy resheniya] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2009. – V. 151, Book 3. – P. 108–120. (in Russian)
4. **Golovanov A.I., Konoplev Y.G., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids. IV. Finite Element Realization [Chislennoye issledovaniye konechnykh deformatsiy giperuprugikh tel. IV. Konechnoelementnaya realizatsiya. Primery resheniya zadach] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2010. – V. 152, Book 4. – P. 115–126. (in Russian)
5. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies // Prikladnaya Mekhanika. – 2005. – V. 41, № 6. – P. 36–43.
6. **Bonet J., Wood R.D.** Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis, 1997. – 283 p.
7. **Truesdell C.** Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics. – New York: Academic Press, 1977.
8. **Green A., and Adkins J.E.** Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics. – Oxford: Clarendon Press, 1960.
9. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Postbuckling elastoplastic state analysis of three-dimensional bodies taking into account finite strains // Russian Aeronautics. – 2008. – V. 1, № 4. – P. 362–368.
10. **Oden J.T.** Finite elements of nonlinear continua. – New York: McGraw-Hill, 1972.
11. **Chernykh K.F.** Nonlinear theory of elasticity in engineering calculation [Nelineynaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh]. – St.Petersburg: Mashinostroyeniye, 1986. – 336 p. (in Russian)
12. **Schröder J., Gruttmann F. Löblein J.** A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures // Computational Mechanics. – 2002. – P. 48–64.
13. **Eidel B., Gruttmann F.** Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // Computational Materials Science. – 2003. – V. 28. – P. 732–742.
14. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable medium [Matematicheskiye modeli vychislitel'noy nelineynoy mekhaniki deformiruyemykh sred]. – Kazan: KSU, 2009. – 465 p. (in Russian)
15. **Korobeynikov S.N.** Nonlinear deformation of solids [Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel]. – Novosibirsk, 2000. – 262 p. (in Russian)
16. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Theoretical foundations of computational nonlinear mechanics of deformable medium [Teoreticheskiye osnovy vychislitel'noy nelineynoy mekhaniki deformiruyemykh sred]. – Kazan: KSU, 2008. – 165 p. (in Russian)
17. **Davydov R.L., Sultanov L.U.** Numerical algorithm of solving the problem of large elastic-plastic deformation by FEM // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2013. – № 1. – P. 81–93.

18. **Sultanov L.U., Davydov R.L.** Numerical analysis of large deformation by finite element method [Chislennoye issledovaniye bol'shikh deformatsiy metodom konechnykh elementov] // Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal – St.Petersburg: SPbGU. – 2013. – № 9 (44). – P. 64–68. (in Russian)
19. **Golovanov A.I., Sultanov L.U.** Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies // International Applied Mechanics. – 2005. – V. 41, № 6. – P. 614–620.
20. **Sultanov L.U., Davydov R.L.** Mathematical modeling of large elastic-plastic deformations // Applied Mathematical Sciences. – 2014. – V. 8, № 57-60. – P. 2991–2996.